Métodos Numéricos
23 de abril de 2018
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	Lib. Univ.	Nombre y Apellido		
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 16	Ej. 2 11	Ej. 3 25	Ej. 4 8
			Nota	60 A

1. Sea $t \in \mathbb{R}$, consideremos la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 2 & 1-t & 2t-1 & -6 \\ -4 & 2t-2 & 2t+2 & t+7 \end{pmatrix}$$

   (a) Para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, determinar $dim(Nu(A))$ y $dim(Im(A))$. (10 pts.)

   (b) Para el o los casos en que $dim(Nu(A)) = dim(Im(A))$:

      i. Hallar una base B_{Nu} del $Nu(A)$ y una base B_{Im} de la $Im(A)$. (8 pts.)

      ii. Hallar una base B_1 de $\mathbb{R}^4$ que contenga a B_{Nu} y una base B_2 de $\mathbb{R}^4$ que contenga a B_{Im}. (7 pts.)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 3)$ una matriz con las submatrices principales inversibles, con $a_{ij}^{(k)}$ el elemento (i,j) de A luego de k pasos de eliminación gaussiana y $A_{22}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{2\leq i,j\leq n}$.

   (a) Probar que si A es tridiagonal, entonces $A_{22}^{(1)}$ es también tridiagonal. (10 pts.)

   (b) Supongamos que $A_{22}^{(1)} = L_2$, con L_2 una matriz triangular inferior no necesariamente con unos en la diagonal. Hallar la factorización LU de A (L con unos en la diagonal). (15 pts.)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica.

   (a) Probar que A es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A_{ij} = \mathbf{x}_i^t \mathbf{x}_j$. (15 pts.)

   (b) Siendo e_i el i-ésimo canónico de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_k = \sum_{i=k}^n e_i$, y $A_{ij} = \mathbf{x}_i^t \mathbf{x}_j$, se define la matriz $B = \begin{pmatrix} A & be_1 \\ be_1^t & 1 \end{pmatrix}$, con $b \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < \sqrt{1/A_{11}^{-1}}$ entonces B es definida positiva. (10 pts.)

4. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n, u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n$. Se desea hallar la factorización QR de la matriz $A + uv^t$ asumiendo conocida la factorización $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$. Consideremos $A + uv^t = Q\left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + wv^t\right]$, con $w = Q^t u$.

   (a) Hallar una transformación H de Householder tal que $H\left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + wv^t\right] = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{w}v^t$, con $\widetilde{w} = (w_1, \ldots, w_n, \widetilde{w}_{n+1}, 0, \ldots, 0)^t$. Justificar su construcción y cómo depende de los valores de w. (8 pts.)

   (b) Considerando la matriz $B = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{w}v^t$ del item anterior, hallar las n rotaciones de Givens que forman la matriz $G_1 = G_{i_1,j_1}^{(1)} \cdots G_{i_n,j_n}^{(n)}$ de forma tal que $G_1 B = \begin{pmatrix} R \\ z^t \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e_{n+1} v^t$, con $\beta = \pm\|w\|_2$, $z \in \mathbb{R}^n$ y e_{n+1} el $(n+1)$-ésimo canónico de $\mathbb{R}^m$. Para cada $G_{i_k,j_k}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, que rota las componentes i_k y j_k de un vector en $\mathbb{R}^m$, determinar los valores i_k y j_k correspondientes. (8 pts.)

   (c) Hallar G_2 de Givens de forma tal que $G_2(G_1 B) = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\widetilde{R}$ triangular superior. Como en el item anterior, determinar cuántas rotaciones son necesarias y cuáles son las componentes rotadas. (4 pts.)

   (d) Construir la factorización QR de $A + uv^t$ en función de Q, H, G_1, G_2 y $\widetilde{R}$. (5 pts.)

1) Sea $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que: a) Para hallar $\dim(Nu(A))$ y $\dim(Im(A))$ probamos aplicando el algoritmo de EG a A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 2 & 1-t & 2t-1 & -6 \\ -4 & 2t-2 & 2t+2 & t+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - (-2)F_1]{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 0 & -t & 2t & -5 \\ 0 & 2t & 2t & t+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - 2F_2]{F_3 \leftarrow F_3 - (-1)F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2t & -2 \\ 0 & 0 & 2t & t-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \leftarrow F_4 - (-1)F_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$ $t \neq 1$

Con ello vemos que: $A.x = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \ (1) \\ tx_2 + 3x_4 = 0 \ (2) \\ 2tx_3 - 2x_4 = 0 \ (3) \\ (t-3)x_4 = 0 \ (4) \end{cases}$ $t \neq 1$

(4) $(t-3)x_4 = 0$: $t-3=0 \Rightarrow t=3$; $x_4 = 0$

* Si $t = 3 \Rightarrow x_4 \in \mathbb{R}$ ((4) se cumple para todo $x_4 \in \mathbb{R}$) y luego (3): $6x_3 - 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}x_4$ (2): $3x_2 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_4$

(1): $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow 2x_1 + \cancel{x_4} - \frac{1}{3}x_4 + \cancel{x_4} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}x_4$ //. Para $t=3$: $A.x = 0 \iff x^t = (\frac{1}{6}x_4, x_4, \frac{1}{3}x_4, x_4) =$

$= x_4(\frac{1}{6}, 1, \frac{1}{3}, 1) \Rightarrow Nu(A) = \langle \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{3}, 1 \rangle$ y luego $\dim(Nu(A)) = 1$. Por el teorema de la dimensión: $\dim(Im(A)) = n -$

$- \dim(Nu(A)) = 4 - 1 = 3$

* Si $t \neq 3$: $x_4 = 0$. Luego (3): $2tx_3 - 2x_4 = 0 \Rightarrow 2tx_3 = 0$: $2t = 0 \Rightarrow t = 0$; $x_3 = 0$

• Si $t=0$: $x_3 \in \mathbb{R}$ y $2tx_3 - 2x_4 = 0 \ \forall x_3 \in \mathbb{R} \longrightarrow$ (2): $3x_4 = 0 \ \forall x_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow$ (1): $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -x_2 + x_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-x_2+x_3}{2}$. Luego $A.x = 0 \iff x^t = (\frac{-x_2+x_3}{2}, x_2, x_3, 0) = x_2(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + x_3(\frac{1}{2}, 0, 1, 0) \Rightarrow Nu(A) = \langle(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0),$

$(\frac{1}{2}, 0, 1, 0)\rangle$ donde vemos que $\dim(Nu(A)) = 2$ pues $\{(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1, 0)\}$ es un conjunto l.i.

$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ / \ \lambda_1.(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + \lambda_2(\frac{1}{2}, 0, 1, 0) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0)$

De ahí vemos por el teorema de la dimensión que $\dim(Im(A)) = n - \dim(Nu(A)) = 4 - 2 = 2 = \dim(Nu(A))$

• Si $t \neq 3$ y $t \neq 0$: $x_4 = 0$ y $x_3 = 0$

Después tenemos que (2): $tx_2 + 3x_4 = 0 \Rightarrow tx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ $(t \neq 0)$ (1): $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Por ende $A.x = 0 \iff x = 0 \Rightarrow Nu(A) = \langle(0,0,0,0)\rangle$ y $\dim(Nu(A)) = 0 \Rightarrow$ (por el teorema de la dimensión) $\dim(Im(A)) = 4$

b) Por el ejercicio anterior vimos que $\dim(Nu(A)) = \dim(Im(A))$ sii $t = 0$

i) Vimos que $Nu(A) = \langle(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1, 0)\rangle$ luego podemos tomar $B_{Nu} = \{(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1, 0)\}$ donde dichos vectores forman un conjunto l.i. por lo ya probado y todo vector de $Nu(A)$ es combinación lineal de ellos.

Para $Im(A)$ vemos que como $t = 0$: $A' \neq A$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ siendo A' la triangulación de A, entonces $A.x = y$ con $y \in Im(A)$ se resuelve con $A'.x = y \Rightarrow A'.x = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 3x_4 \\ -2x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix}$

Por lo que $\exists x \in \mathbb{R}^n \ / \ A.x = y \iff y^t = (2x_1 + x_2 - x_3 - x_4, 3x_4, -2x_4, -x_4) = x_1(2,0,0,0) + x_2(1,0,0,0) + x_3(-1,0,0,0) + x_4(-1,3,-2,-1)$

Entonces $Im(A) = \langle(2,0,0,0), (1,0,0,0), (-1,0,0,0), (-1,3,2,-1)\rangle$ donde $(2,0,0,0) = 2(1,0,0,0)$ y $(-1,0,0,0) = -1.(1,0,0,0) \Rightarrow Im(A) =$

$= \langle(-1,0,0,0), (-1,3,2,-1)\rangle$ y vemos que $\{(-1,0,0,0), (-1,3,2,-1)\}$ es un conjunto l.i. pues:

Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1(-1,0,0,0) + \lambda_2(-1,3,2,-1) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \\ 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Big\} \underline{\lambda_2 = 0}$

$\therefore$ $\underline{B_{Im} = \{(-1,0,0,0), (-1,3,2,-1)\}}$ es una base de $Im(A)$ (todo vector de $Im(A)$ es c.l. de estos y son l.i.)

ii) Desde $B_{Nu} = \{(-\frac{1}{2},1,0,0), (\frac{1}{2},0,1,0)\}$ tomamos $B_1 = \{\underbrace{(-\frac{1}{2},1,0,0), (\frac{1}{2},0,1,0)}_{B_{Nu}}, (\frac{1}{2},0,0,1), (0,1,1,1)\}$ y probamos que es un conjunto l.i.

Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$: $\lambda_1 . (-\frac{1}{2},1,0,0) + \lambda_2(\frac{1}{2},0,1,0) + \lambda_3(\frac{1}{2},0,0,1) + \lambda_4(0,1,1,1) = 0 \iff \begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 & (2) \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & (3) \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (4) \end{cases}$

(2): $\lambda_1 = -\lambda_4$ (3): $\lambda_2 = -\lambda_4$ (4): $\lambda_3 = -\lambda_4$ y entonces

(1): $-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_4 = \frac{1}{2}\lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \underline{0}$

$\therefore$ B_1 es un conjunto l.i. de vectores de $\mathbb{R}^4$ con 4 vectores $\Rightarrow$ $\underline{B_1 \text{ es base de } \mathbb{R}^4}$

podrías evitar esto

Siendo $B_{Im} = \{(-1,0,0,0), (-1,3,2,-1)\}$ tomamos $B_2 = \{\underbrace{(-1,0,0,0), (-1,3,2,-1)}_{B_{Im}}, (0,1,0,0), (0,0,2,0)\}$ y vemos que es un conjunto l.i.:

Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$: $\lambda_1 . (-1,0,0,0) + \lambda_2(-1,3,2,-1) + \lambda_3 . (0,1,0,0) + \lambda_4(0,0,2,0) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1) \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 & (3) \\ -\lambda_2 = 0 & (4) \end{cases}$

(4): $\lambda_2 = 0$ (3): $2\lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$ (2): $\lambda_3 = 0$ (1): $-\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\therefore$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \underline{0}$

En consecuencia, B_2 es un conjunto l.i. de vectores de $\mathbb{R}^4$ con 4 vectores $\Rightarrow$ $\underline{B_2 \text{ es base de } \mathbb{R}^4}$

2) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 3)$ matriz con las submatrices principales inversibles, $a_{ij}^{(k)}$ el elemento (i,j) de A luego de k pasos de EG

a) Queremos ver que si A es tridiagonal, $A_{22}^{(1)}$ es tridiagonal siendo que una matriz es tridiagonal si $\forall i \in \{1,\dots,n-2\}\ \forall j \in \{i+2,\dots,n\}$ los elementos (i,j) y (j,i) son nulos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}}_{} = A$$

En el primer paso de EG vemos que como $a_{j1} = 0$ para todo $j \in \{3,\dots,n\}$ luego las filas $3,\dots,n$ de A no se modifican. Por lo tanto

$\underline{a_{ij}^{(1)} = a_{ij}}$ para todo $1 \leq j \leq n$ y $3 \leq i \leq n$.

Para la fila 2 vemos que con $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ tenemos $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ $a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - m_{21}\cdot a_{1j}$. Sin embargo, como A es tridiagonal, para todo $j \in \{1+3,\dots,n\}$ $a_{1j} = 0 \Rightarrow \underline{a_{2j}^{(1)} = a_{2j}}$ para todo $j \in \{3,\dots,n\}$ y vemos que la matriz $A^{(1)}$ es de la forma:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$ con $A_{22}^{(1)}$ el bloque inferior derecho,

donde para $A_{22}^{(1)}$ vemos que para todo $i \in \{2,\dots,n-2\}$ y $j \in \{i+2,\dots,n\}$ $a_{ij}^{(1)} = 0$ y $a_{ji}^{(1)} = 0$

$\therefore$ $\underline{A_{22}^{(1)} \text{ es tridiagonal}}$

B

b) Siendo ahora $A_{22}^{(1)} = L_2$ donde L_2 es triangular inferior, vemos que $A^{(1)} = M_1 . A = \begin{pmatrix} a_{11} & v^t \\ \vec{0} & L_2 \end{pmatrix}$ donde $v = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$ siendo $\vec{0}$ un vector nulo

y $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ ? & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Queremos hallar la factorización L.U de A y para ello tomamos: $L' = \begin{pmatrix} l_1 & \vec{0}^t \\ l_2 & L_3 \end{pmatrix}$ y $U' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2^t \\ \vec{0} & U_3 \end{pmatrix}$

donde $l_1, u_1 \in \mathbb{R}$, $u_2, l_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $L_3, U_3 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ y hacemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v^t \\ \vec{0} & L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \vec{0}^t \\ l_2 & L_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 & u_2^t \\ \vec{0} & U_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} l_1 . u_1 = a_{11} & (1) \\ l_1 . u_2^t = v^t & (2) \\ l_2 . u_1 = \vec{0} & (3) \\ l_2 . u_2^t + L_3 . U_3 = L_2 & (4) \end{cases}$$

(1) Vemos que si L' es triangular con 1 en su diagonal $\Rightarrow l_1 = 1$

Por ende $u_1 . 1 = u_1 = \underline{a_{11}}$

(2): $u_2^t = v^t \Rightarrow \underline{u_2 = v = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}}$ (3): $l_2 . a_{11} = \vec{0} \Rightarrow \underline{l_2 = \vec{0}}$

(4): $l_2 . u_2^t + L_3 . U_3 = 0 + L_3 . U_3 = L_2$ donde si tomamos $L_3 = L_2$ y $U_3 = I_{n-1}$ vemos que $L_3 U_3 = L . I_{n-1} = L_2$

~~Por lo tanto~~ $\cancel{A^{(1)} = L' . U'}$ ~~con~~ $\cancel{L' = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & L \end{pmatrix}}$ ~~y~~ $\cancel{U' = \begin{pmatrix} a_{11} & v^t \\ \vec{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}}$ ~~donde como L tiene~~

Pero L_2 no necesariamente tiene unos en su diagonal, por lo que no podemos asignar L_2 a L (....)

3) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica

a) Queremos ver que A es definida positiva sii existe un conjunto l.i. $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A_{ij} = x_i^t . x_j$

$\Rightarrow$) Si A es def. pos $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \; x \neq 0 \; x^t A . x > 0$. A su vez, si A es def. pos, $A^t = A$ y A^t es def. pos. Por otra parte, sabemos que si

A es def. pos., A es inversible (supongamos que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $A.x = 0$ con $x \neq 0 \Rightarrow x^t A . x = 0$ ABSURDO pues A es def. pos)

y por ser inversible, las columnas de A forman un conjunto l.i., al igual que sus filas $(A = A^t)$. ✓

Por otra parte, si A es s.d.p. (simétrica definida positiva) A tiene factorización de Cholesky y entonces existe L triangular inferior con diagonal positiva tal que $A = L . L^t$. Como A es s.d.p, A es inversible y como $\det(L) = \prod_{k=1}^{n} l_{kk} > 0$, L es inversible y por ende sus columnas son l.i. Esto mismo podemos decir de L^t y las columnas de L^t son las filas de $L \Rightarrow$ las filas de L son l.i. ✓

Si tomamos el conjunto $\{l_1^t, \dots, l_n^t\}$ donde l_i^t es la i-ésima fila de L, vemos que como $A = L . L^t \Rightarrow A_{ij} = \text{fila}_i(L) . \text{col}_j(L^t) = \text{fila}_i(L) . \text{fila}_j(L) = l_i^t . l_j$ $\therefore$ Existe un conjunto l. $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $A_{ij} = x_i^t . x_j$ ✓

$\Leftarrow$) Si existe un conjunto l.i. $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A_{ij} = x_i^t x_j$ vemos que podemos escribir a la matriz A como:

$$\begin{pmatrix} x_1^t . x_1 & x_1^t . x_2 & \cdots & x_1^t . x_n \\ x_2^t . x_1 & x_2^t . x_2 & \cdots & x_2^t . x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^t . x_1 & x_n^t . x_2 & \cdots & x_n^t . x_n \end{pmatrix} = A$$

donde si miramos para cada columna j a x_j vemos que podemos escribir

$$\text{col}_j(A) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^t \\ \vdots \\ x_n^t \end{pmatrix}}_{H} . x_j = H . x_j$$

En base a eso: $A = (H.x_1, H.x_2, \dots, H.x_n)$. Por otra parte, tomando $H' = (x_1 \; x_2 \dots x_n)$ vemos que $A = H . H' = \begin{pmatrix} x_1^t \\ \vdots \\ x_n^t \end{pmatrix} . (x_1 \dots x_n)$

Ahora, $H^t = (x_1, x_2, \dots, x_n) = H' \Rightarrow A = H . H^t$ y vemos que para $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^t . A . x = x^t . H . H^t . x = (H^t x)^t . H^t . x = \|H^t x\|_2^2$

donde como $x \neq 0$ vemos? que H^t es no singular pues sus columnas son l.i. ($\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto) entonces $H^t x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ✓

Por lo tanto A es def. pos. y siendo $A_{ij} = x_i^t . x_j = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} . x_{jk} = \sum_{k=1}^{n} x_{jk} . x_{ik} = x_j^t . x_i = A_{ji}$, A es simétrica definida positiva

15

impecable

b) Sea e_i el i-ésimo canónico de $\mathbb{R}^n$, $x_k = \sum_{i=k}^{n} e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow k$ y $A_{ij} = x_i^t . x_j$ tenemos $B = \begin{pmatrix} A & b e_1 \\ b e_1^t & 1 \end{pmatrix}$ con $b \in \mathbb{R}$.

Queremos ver que si $|b| < \sqrt{1/(A_{11}^{-1})}$ luego B es definida positiva

Visto de otra manera, $B = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline b \; 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$ A su vez, si tomamos el conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ donde $x_i = \sum_{k=i}^{n} e_i$ podemos que es un conjunto l.i.:

Si tomamos a los vectores del conjunto como $H = (x_1 \; x_2 \dots x_n)$ vemos que como

~~Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$: $\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2 + \dots + \lambda_n . x_n$~~ $x_i = \sum_{k=i}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow i \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 \cdots & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior

con unos en su diagonal $\Rightarrow \det(H) = 1$ y la matriz H es inversible, por lo que sus columnas forman un conjunto l.i., es decir, $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto l.i. ✓ Finalmente, como $A_{ij} = x_i^t . x_j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, usando a) vemos que A es s.d.p.

Siendo así, A tiene factorización de Cholesky, o sea que puede escribirse como $A = L' . L'^t$ con L' triangular inferior con diagonal positiva

Para ver que B es s.d.p. buscamos $L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ triangular inferior con diagonal positiva, tal que $B = L . L^t$. Para ello, tomamos

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & \vec{0} \\ l_2^t & l_3 \end{pmatrix}$$ y vemos que $$B = L . L^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & b e_1 \\ b e_1^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & \vec{0} \\ l_2^t & l_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} L_1^t & l_2 \\ \vec{0}^t & l_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 . L_1^t = A & (1) \\ L_1 . l_2 = b . e_1 & (2) \\ l_2^t . L_1^t = b . e_1^t & (3) \\ l_2^t . l_2 + l_3^2 = 1 & (4) \end{cases}$$ ✓

(1): $L_1 . L_1^t = A$. Aquí vemos que $A = L'.L'^t$ siendo L' triangular inferior con diagonal positiva $\Rightarrow$ tomo $L_1 = L'$ ✓

(2): $L_1 . l_2 = b.e_1 \Rightarrow L'.l_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow l_2 = L'^{-1}.\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (L' es no singular por ser triangular inferior con diagonal positiva) ✓

(3): $l_2^t . L_1^t = b.e_1^t \Rightarrow L_1 . l_2 = b.e_1$ ✓

(4): $l_2^t . l_2 + l_3^2 = 1 \Rightarrow (L'^{-1}be_1)^t.(L'^{-1}.be_1) + l_3^2 = \|L'^{-1}.be_1\|_2^2 + l_3^2 = 1$ donde $(L')^{-1}.be_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ & \vdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} b\, l_{11} \\ b\, l_{21} \\ \vdots \\ b\, l_{n1} \end{pmatrix} = b.\begin{pmatrix} l_{11} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{pmatrix}$. Luego $\|(L')^{-1}.be_1\|_2^2 = |b|^2 \cdot \|col_1 (L')^{-1}\|_2^2$. y tenemos que $l_3^2 = 1 - |b|^2 . \|col_1 (L')^{-1}\|_2^2$

~~Podemos ver la forma de col₁(L'⁻¹) viendo que (L')(L')⁻¹ = I y L' = (◺) ⟹ Para todo j∈{2,...,n}~~

Siendo que $|b| < \sqrt{1/(A_{11}^{-1})} \Rightarrow l_3^2 > 1 - \frac{1}{A_{11}^{-1}} . \|col_1 (L')^{-1}\|_2^2$.

Teniendo L'^{-1} vemos que como $L'.L'^t = A \Rightarrow$ tomando $(L'^{-1})^t.(L'^{-1})$ vemos que $L'.L'^t.(L'^{-1})^t.(L')^{-1} = L'.\underbrace{(L'^{-1}.L')^t}_{I}.(L')^{-1} =$

$= L'.(L')^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = (L'^{-1})^t.(L')^{-1}$ y luego $A_{11}^{-1} = fila_1 (L'^{-1})^t . col_1 (L'^{-1}) = col_1 (L'^{-1})^t . col_1 (L'^{-1}) = \|col_1 (L'^{-1})\|_2^2$ ✓

Volviendo, vemos que $l_3^2 > 1 - \frac{1}{A_{11}^{-1}} A_{11}^{-1} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow l_3^2 > 0 \Rightarrow l_3 > 0$ (tomamos $l_3 > 0$ por la factorización) ✓

De esa forma: $L = \begin{pmatrix} L_1 & \vec{0} \\ l_2^t & l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' & \vec{0} \\ (L'^{-1}).be_1 & l_3 \end{pmatrix}$ es triangular inferior con diagonal positiva y $B = L.L^t$ ∴ B es s.d.p.

un consejo: usá la not $A = LL^t$ para no escribir primas en todo lado.

10

¡muy bien! Tal vez tomaba menos trabajo calcular

$$l_2^t l_2 = (L'^{-1} b e_1)^t (L'^{-1} b e_1) = e_1^t b L'^{-t} L'^{-1} b e_1$$

$$= e_1^t b A^{-1} b e_1 = b^2 e_1^t A^{-1} e_1 = b^2 A_{11}^{-1}.$$

4) Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ tenemos la matriz $A + u.v^t$ de la que conocemos que $A = Q.\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$

Sea entonces $A + uv^t = Q\left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + wv^t\right]$ con $w = Q^t u \longrightarrow Q.\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{Q.Q^t}_{I} u.v^t = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} uv^t = A + uv^t$

a) Buscamos H transformación de Householder tal que $H\left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + wv^t\right] = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{w}v^t$ con $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n, \tilde{w}_{n+1}, 0, \dots, 0)^t$

Para ello tomamos $w \in \mathbb{R}^m = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ pues $w = Q^t.u$ con $Q^t \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $u \in \mathbb{R}^m$ y miramos los vectores $w' = \begin{pmatrix} w_{n+1} \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ y $w'' = \begin{pmatrix} \|w'\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

De aquí vemos que como $\|w''\|_2 = \sqrt{\|w'\|_2^2} = \|w'\|_2 \Longrightarrow$ Existe una transformación lineal de Householder $H' = I - 2uu^t$ tal que $u =$

$= w' - w''$ y $H'.\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|w'\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego, si tomamos $H = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H' \end{pmatrix}$ vemos que siendo $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $H' \in \mathbb{R}^{(m-n)\times(m-n)}$:

$H.\left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + wv^t\right] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & H' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ w' \end{pmatrix} v^t = \begin{pmatrix} I.R + 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I.\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + 0 \\ H'.w' \end{pmatrix} v^t = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ w'' \end{pmatrix} v^t$ y para $\tilde{w}_{n+1} = \|w'\|_2$ llegamos a que $H.\left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + wv^t\right] = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{w}v^t$

b) Sea $B = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{w}v^t$ buscamos las n rotaciones de Givens que forman $G_1 = G^{(1)}_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot G^{(n)}_{i_n j_n}$ tal que $G_1.B = \begin{pmatrix} R \\ z^t \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e_{n+1} v^t$

siendo $\beta = \pm\|w\|_2$, $z \in \mathbb{R}^n$ y e_{n+1} el $(n+1)$-ésimo canónico de $\mathbb{R}^m$, es decir, $\beta.e_{n+1}.v^t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow n+1$